Das sollten Sie zusätzlich beherrschen, wenn Sie für den Quereinstieg in die Q-Phase vorgeschlagen werden:

Aufgabe 1 – Ableitungen

Bilden Sie die erste Ableitung und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

1.1 $f(x) = x^3 + 7x^4 - 2x + 12$
1.2 $f(x) = 7x^{-4} + e^x$
1.3 $f(x) = 4e^{5x} \cdot 0{,}5e^{x^2}$
1.4 $f(x) = [2\sin(x+1)]^2$

Aufgabe 2 - Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen f‘, f‘‘ und f‘‘‘ von f.
Berechnen Sie die Nullstellen, die Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion f.
Zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 3 - Schnittpunktberechnung

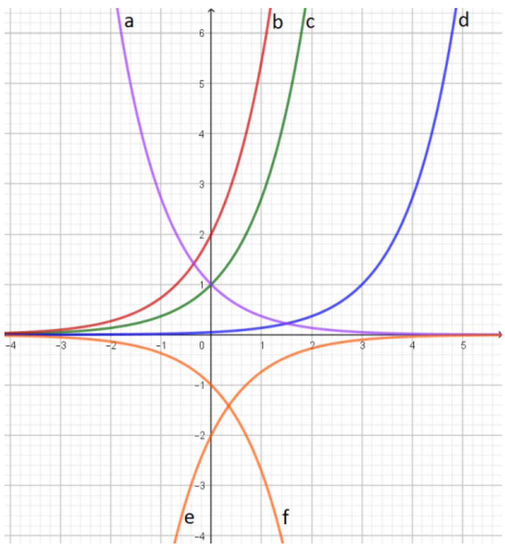
Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktionen f und g mit
$f(x) = e^{(x+3)}$ und $g(x) = 3e^{-x}$

Aufgabe 4 – e- Funktionen, Zuordnung Funktionsgleichung zu Graph

Ordnen Sie die folgenden e-Funktionen 1 – 6 den Graphen a – f zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1. $f(x) = -2e^{-x}$ 2. $f(x) = e^x$ 3. $f(x) = 2e^x$

4. $f(x) = e^{(x-3)}$ 5. $f(x) = -e^x$ 6. $f(x) = e^{-x}$



Aufgabe 5 – Trigonometrische Funktionen, Zuordnung Funktionsgleichung zu Graph

Ordnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen a) bis h) den Graphen A – H zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $f(x) = \sin(x) + 1$

b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$

c) $f(x) = -\sin(x)$

d) $f(x) = \sin(2x)$

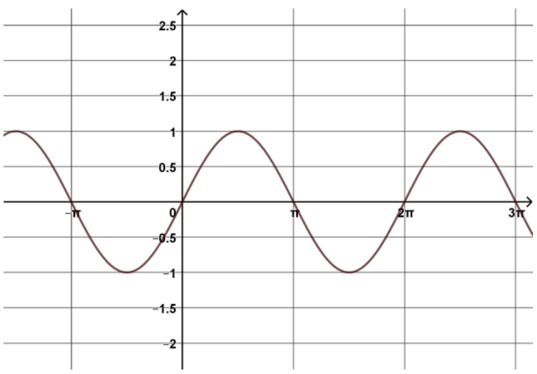
e) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

f) $f(x) = \sin(x)$

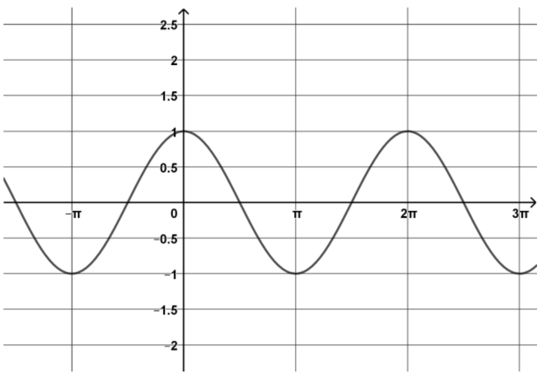
g) $f(x) = \cos(x)$

h) $f(x) = -2\cos(x)$

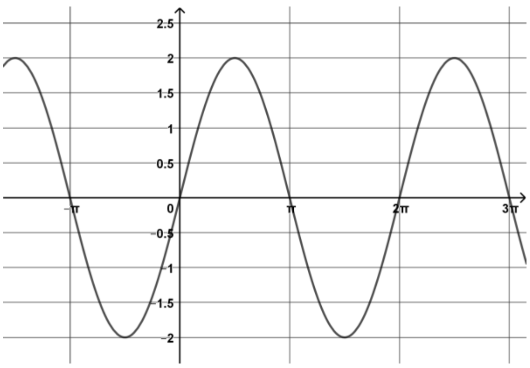
A



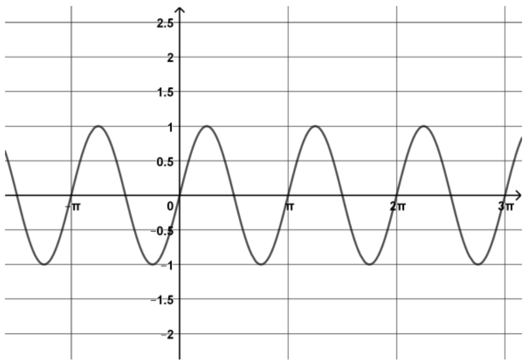
B



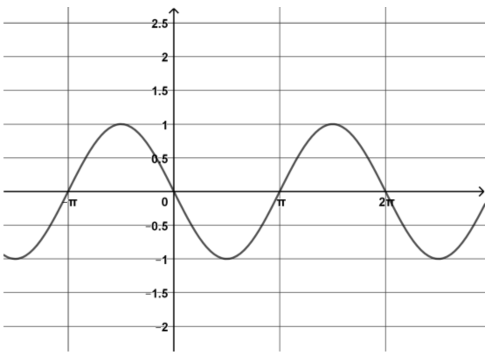
C



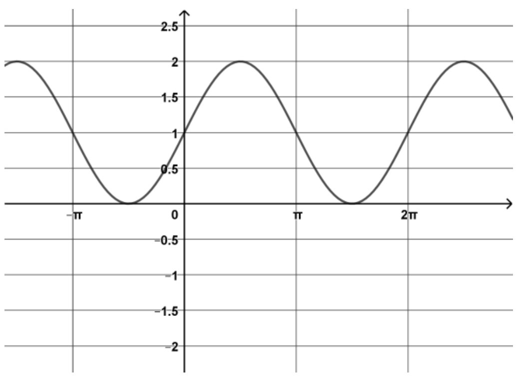
D



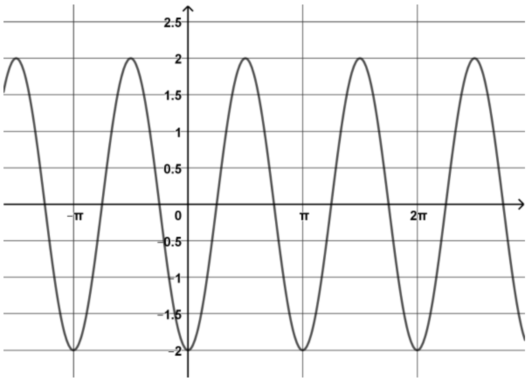
E



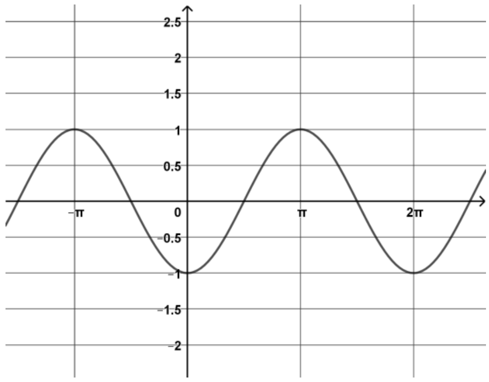
F



G



H



Aufgabe 6 – Trigonometrische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden trigonometrischen Gleichungen

a) $\sin(x) = 0{,}6 \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

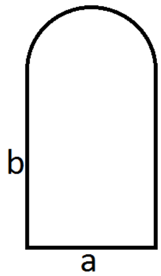
b) $3\cos x + 1 = 2 \qquad -\pi \leq x \leq \pi$

c) $5\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 3 \qquad 0 \leq x \leq 4$

d) $5\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 2{,}5 \qquad -4 \leq x \leq 4$

Aufgabe 7 – Extremalaufgabe

Ein Fenster soll bei einem Umfang U=2,5 m die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreisbogen haben (vgl. Abbildung). Dabei soll der Flächeninhalt des Fensters maximal sein.



a) Wie müssen a und b gewählt werden?
b) Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

Lösungen:

zu Aufgabe 1:

1.1 $f'(x) = 3x^2 + 28x^3 - 2$

1.2 $f'(x) = -28\,x^{-5} + e^x$

1.3 $f'(x) = 20e^{5x} \cdot 0{,}5e^{x^2} + 4e^{5x} \cdot x \cdot e^{x^2} = (10 + 4x) \cdot e^{5x+x^2}$

1.4 $f'(x) = 4\cos(x + 1)$

zu Aufgabe 2:

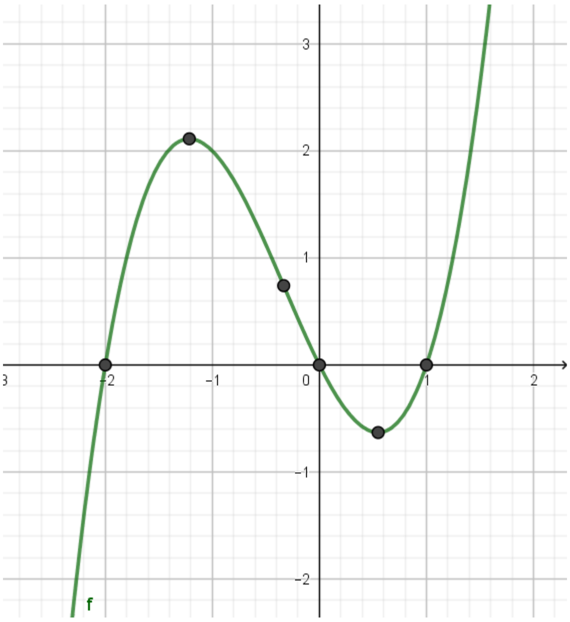
Ableitungen $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $f''(x) = 6x + 2$, $f'''(x) = 6$

Nullstellen $f(x) = 0$, $L\,\{-2, 0, 1\}$

Extrema $f'(x) = 0$, $H(-1{,}22|2{,}11)$; $T(0{,}55| - 0{,}63)$

Wendestelle $f''(x) = 0$, $W(-0{,}33|0{,}74)$

Skizze



zu Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} e^{(x+3)} &= 3e^{-x} \quad |\ln \\ x + 3 &= \ln(3) - x \\ x &= \frac{-3+\ln(3)}{2} \approx -0{,}95 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt liegt bei S $(-0{,}95\ |7{,}77)$

zu Aufgabe 4:

1 – e , da Koeffizient -2 eine Streckung und Spiegelung an der x-Achse und ein negativer Exponent eine Spiegelung an der y-Achse bewirkt

2 – c , da jede Exponentialfunktion der Art a^x die y-Achse bei 1 schneidet

3 – b , da der Koeffizient den Graph um 2 streckt, Schnittpunkt mit der y-Achse bei 2

4 – d , da der Exponent x-3 eine Verschiebung um 3 nach rechts bewirkt

5 – f , da der negative Koeffizient eine Spiegelung an der x-Achse bewirkt

6 – a , da der negative Exponent eine Spiegelung an der y-Achse bewirkt

zu Aufgabe 5:

a) zu F, da der Summand + 1 eine Verschiebung der Sinuskurve um +1 in y-Richtung bewirkt.
b) zu H, da der Summand + $\frac{3}{2}\pi$ im Argument des Sinus eine Verschiebung der Sinuskurve um + $\frac{3}{2}\pi$ nach links bewirkt. Die Funktion ist dann auch gleich $f(x) = -\cos(x)$.
c) zu E, da das negative Vorzeichen vor der Sinus-Funktion eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse bewirkt.
d) zu D, da die Verdoppelung des Arguments eine Stauchung des Graphen entlang der x-Achse bewirkt.
e) zu C, da durch den Vorfaktor 2 die Sinuskurve um den Faktor 2 gestreckt wird.
f) zu A, Sinus-Funktion, schneidet die y-Achse im Koordinatenursprung mit Steigung 1.
g) zu B, Cosinus-Funktion, schneidet die y-Achse bei y = 1 mit waagerechter Tangente.
h) zu G, Cosinus-Funktion wegen Vorfaktor -2 an der y-Achse gespiegelt und um 2 gestreckt (schneidet die y-Achse bei y = -2).

zu Aufgabe 6:

a) $x = \arcsin(0{,}6) \approx 0{,}64$

b) $x = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1{,}23$

c) $x = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0{,}41$

d) $x = \frac{4}{\pi}\arccos(0{,}5) = \frac{4}{3}$

zu Aufgabe 7:

Hauptbedingung: $A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a \cdot b + \frac{a^2}{8}\pi$

Nebenbedingung: $U = a + 2b + \frac{a}{2}\pi = 2{,}5 \Longrightarrow b = \frac{5-2a-\pi a}{4}$

Durch Einsetzen in die Hauptbedingung erhält man die Zielfunktion:

$$A(a) = a \cdot \frac{5-2a-\pi a}{4} + \frac{a^2}{8}\pi = \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)a^2 + \frac{5}{4}a$$

Die erste und zweite Ableitung sind: $A'(a) = \left(-\frac{\pi}{4} - 1\right)a + \frac{5}{4}$ und $A''(a) = \left(-\frac{\pi}{4} - 1\right)$

Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf $a = \frac{5}{\pi+4} \approx 0{,}7\,m \Rightarrow b = \frac{5}{2(\pi+4)} \approx 0{,}35\,m$

und daraus $A = \frac{50+25\pi}{4(\pi+4)^2} \approx 0{,}63\,m^2$